Cours de Mathématiques

UE L2-S3 : Série

Licences de mathématiques, informatique, CUPGE

5 juillet 2024

Alexandre MIZRAHI

Table des matières

Chapitre 1

Suites numériques

1 Compléments sur les suites

vidéo 1: Le

Dans ce cours les suites sont indicées par $\mathbb{N}$, il peut arriver que les indices commencent à 1 ou à 2 cela ne change pas grand chose.

Définition 1.1 Une suite de réels (u_n) converge vers un réel l lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

On note alors $\lim u_n = l$

Une suite de réels (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$$

On note alors $\lim u_n = +\infty$

Proposition 1.1 Soit 3 réels l, l', l'' tels que $l' < l < l''$ et (u_n) une suite telle que $\lim u_n = l$ alors pour n assez grand, on a $l' < u_n < l''$, autrement dit :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow l' < u_n < l''$$

Preuve : On pourra appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon = \min(l'' - l; l - l')$.

Définition 1.2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée, (c'est à dire $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$) on appelle si il existe borne supérieure de A le plus petit majorant de A.

Théorème 1.1 (admis) *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*

Remarque 1.1 Ce résultat n'a rien de simple, une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ n'a pas toujours de plus grand élément. Par exemple $[0; 1[$ n'a pas de plus grand élément. Mais si on regarde l'ensemble des majorants de A, alors cet ensemble possède un plus petit élément. Dans notre exemple l'ensemble des majorants de $[0; 1[$ est l'ensemble $[1; +\infty[$ qui a bien un plus petit élément : 1, d'ou $\sup([0; 1[) = 1$.

Théorème 1.2 *Une suite de réels, croissante $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ et majorée $(\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M)$ est convergente. Elle converge vers la borne supérieure des u_n $(\sup\{u_n \in \mathbb{R} / n \in \mathbb{N}\})$ et chaque élément de la suite est inférieure à la limite.*

Preuve : Posons $l = \sup\{u_n \in \mathbb{R}/n \in \mathbb{N}\}$, c'est le plus petit majorant de $\{u_n \in \mathbb{R}/n \in \mathbb{N}\}$.
Soit $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{u_n \in \mathbb{R}/n \in \mathbb{N}\}$, il existe donc un N tel que $l - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant l$, or la suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \geqslant N$ on a $l - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant l$, finalement on a montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 1.2 Soit (u_n) une suite de réels telle que les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
La suite (u_n) converge si et seulement si $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1}$

Proposition 1.3 Les suites géométriques sont les suites de la forme $u_n = \alpha r^n$, r est appelée raison de la suite géométrique. La limite d'une suite géométrique :
- est 0 si la raison est strictement inférieur à 1 en valeur absolue.
- α si $r = 1$.
- $+\infty$ si $r > 0$ et $a > 0$.
- $-\infty$ si $r > 0$ et $a < 0$.
- n'existe pas si $r \leq -1$.

La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique non constante est égale à :

$$\frac{\text{Le premier terme de la somme} - \text{Le premier terme qui n'est pas dans la somme}}{1 - \text{raison}}$$

fin de la semaine 1 

vidéo 2: Équivalence et Notation de Landau pour le

2 Suites équivalentes

Exemple 2.1 $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$ et $w_n = \frac{n}{n^2+1}$. Les trois ont la même limite mais quelles sont les deux suites qui se "ressemblent" le plus ? Lesquelles s'approchent le plus l'une de l'autre ?

Définition 2.1 On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes lorsqu'il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 et telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$v_n = u_n(1 + \varepsilon_n)$$

Exemple 2.2 $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$ et $w_n = \frac{n}{n^2+1}$. On a par exemple $w_n = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n^2+1})$.

Définition 2.2 Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, $\big($c'est à dire une fonction de E^2 dans $\{V; F\}$, on note $x_1 \mathcal{R} x_2$ au lieu de $\mathcal{R}(x_1; x_2) = V\big)$.
1) $\mathcal{R}$ est réflexive si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
2) $\mathcal{R}$ est symétrique si $\forall x, x' \in E, x\mathcal{R}x' \Rightarrow x'\mathcal{R}x$.
3) $\mathcal{R}$ est transitive si $\forall x, x', x'' \in E, x\mathcal{R}x'$ et $x'\mathcal{R}x'' \Rightarrow x\mathcal{R}x''$.
4) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Proposition 2.1 La relation être équivalente sur l'ensemble des suites réelles est une relation d'équivalence, on notera $u_n \sim v_n$ pour indiquer que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n).

Proposition 2.2 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$. (u_n) et (v_n) sont équivalentes si et seulement si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Proposition 2.3 Soit (u_n) une suite réelle et l un réel non nul :

$$u_n \sim l \Leftrightarrow \lim u_n = l$$

Proposition 2.4 Soit (u_n), (v_n), (w_n), (x_n) et (y_n) des suites de réels
1) Si $u_n \sim v_n$ alors $|u_n| \sim |v_n|$.
2) Si $u_n \sim v_n$ et $x_n \sim y_n$, alors $u_n x_n \sim v_n y_n$
3) Si $u_n \sim v_n$, $x_n \sim y_n$ et à partir d'un certain rang $y_n \neq 0$ alors $\frac{u_n}{x_n} \sim \frac{v_n}{y_n}$
4) Attention en général les équivalents ne peuvent pas se sommer.

Exemple 2.3 Soit $u_n = \frac{n+1}{n}$ et $v_n = \frac{n+2}{n}$, vérifier que $u_n \sim v_n$ et que $u_n - 1 \not\sim v_n - 1$

Fonctions équivalentes

De même que pour les suites, on peut définir la notion d'équivalence de deux fonctions au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$.

Définition 2.3 Soit deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I contenant a, ou bien dont a est une extrémité. f et g sont équivalentes en a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_a \varepsilon = 0$ et il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]a-r, a+r[,\ f(x) = g(x)\big(1+\varepsilon(x)\big)$, on note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$

Proposition 2.5 Si la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de a, (c'est-à-dire s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]a-r, a+r[$) alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Proposition 2.6 Si une fonction f possède un développement limité en a de partie principale non nul, alors f est équivalente en a au terme de plus petit degré de la partie principale du DL.

Exemple 2.4 Le DL_4 en 0 de la fonction f définie sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \sqrt{1+2x}$ est $e^x - \sqrt{1+2x} = x^2 - x^3/3 + (2x^4)/3 + x^4\varepsilon(x)$, on en déduit $(e^x - \sqrt{1+2x}) \sim x^2$.

3 Notations de Landau o et O.

Définition 3.1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles, on dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 et telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$u_n = v_n \times \varepsilon_n$$

On note alors $u_n = \mathbf{o}(v_n)$.
Lorsque $u_n - v_n = \mathbf{o}(w_n)$, on note fréquemment $u_n = v_n + \mathbf{o}(w_n)$

Remarque 3.1 Si $u_n = \mathbf{o}(v_n)$ alors à partir d'un certain rang $u_n = v_n\, \mathbf{o}(1)$, où $\mathbf{o}(1)$ est une suite que tend vers 0.

Définition 3.2 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles, on dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) lorsqu'il existe une constante C et telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$|u_n| \leqslant C|v_n|$$

On note alors $u_n = \mathbf{O}(v_n)$.

Exercice 1 : Montrer que si $u_n = \mathbf{o}(v_n)$ alors $u_n = \mathbf{O}(v_n)$.

Remarque 3.2 Attention, les notations de Landau peuvent porter à confusion la notation avec le signe égale est abusive on devrait plutôt noter $u_n \in \mathbf{O}(v_n)$, en effet l'égalité est impropre car à cause de leur définition le signe égal n'est plus symétrique par exemple on peut écrire $\mathbf{o}(n) = \mathbf{o}(n^2)$, mais on ne peut pas écrire $\mathbf{o}(n^2) = \mathbf{o}(n)$. En effet si une suite s'écrit $u_n = \mathbf{o}(n)$, il existe (ε_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = n\varepsilon_n$, on peut alors écrire $u_n = n^2\frac{1}{n}\varepsilon_n$, la suite $(\frac{1}{n}\varepsilon_n)$ tend bien vers 0, on a donc $u_n = \mathbf{O}(n^2)$

Remarque 3.3 De même on peut définir **o** et **O** pour les fonctions au voisinage d'un point, en particulier on peut écrire les développements limités classiques au voisinage de 0 à l'aide des **O**.

1) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + \mathbf{O}(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + \mathbf{O}(x^{n+1})$

2) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \mathbf{O}(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathbf{O}(x^{n+1})$

3) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \mathbf{O}(x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \mathbf{O}(x^{n+1})$

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{1}{3!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 + \mathbf{O}(x^4)$

5) $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \mathbf{O}(x^{2n+3}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \mathbf{O}(x^{2n+3})$

6) $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \mathbf{O}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \mathbf{O}(x^{2n+2})$

Définition 3.3 Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent vers un même réel l, on dit que (u_n) converge plus vite que (v_n) lorsque $u_n - l = \mathbf{o}(v_n - l)$.

fin de la semaine 2

vidéo 3: Comment additionner une infinité de terme

Chapitre 2

Séries numériques

1 Convergences des séries

Définition 1.1 Soit (u_n) une suite de réels, on appelle <u>série de terme général u_n</u> l'expression formelle $\sum_k u_k$ ou $(\sum_{k\leqslant 0} u_k)$.

1) On appelle <u>somme partielle</u> d'indice n de la série $\sum_n u_n$ le réel

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

2) On dit que <u>la série est convergente</u> lorsque la suite des sommes partielles (S_n) est convergente.
3) On dit que <u>la série est divergente</u> lorsque la suite des sommes partielles (S_n) est divergente.
4) Lorsque la série est convergente on appelle <u>somme de la série</u> la limite de la suite des sommes partielles et on note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim S_n$$

5) Lorsque la série est convergente on appelle <u>reste d'indice n de la série</u>, la quantité R_n suivante

$$R_n = S - S_n \ \ (= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k)$$

6) On appelle nature d'une série le fait que cette série soit convergente ou divergente.

Remarque 1.1 On fera attention a ne pas confondre la série noté $\sum u_k$ ou $\sum_k u_k$ ou $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ qui peut être convergente ou divergente et sa somme $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ qui est un réel et qui n'a de sens que lorsque la série est convergente. Toutefois, lorsque $\lim S_n = +\infty$, on note souvent $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty$ ce qui sous-entends que la série diverge, mais évidement une série $\sum u_k$ peut diverger sans avoir $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty$.

Exemple 1.1 Si $u_n = ar^n$, alors $S_n = \frac{a-ar^{n+1}}{1-r}$, pour quelles valeurs de r cette suite a-t-elle une limite ?
Si $|r| < 1$ alors (S_n) a une limite finie,

Remarque 1.2 Une suite est toujours la somme partielle d'une série, en effet soit (u_n) une suite, cherchons une suite (a_n) tel que $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = u_n$, on voit que $a_0 = u_0$ et $a_n = u_n - u_{n-1}$. Réciproquement si $a_0 = u_0$ et $a_n = u_n - u_{n-1}$ alors $\sum_{k=0}^{n} a_k = u_n$, cette manipulation permettant de transformer une suite en série a le doux nom de télescopie car les termes se télescopent deux à deux.

Proposition 1.1 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et λ un réel, les séries $\sum u_n + v_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont des séries convergentes, et on a les égalités suivantes sur les sommes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k + v_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Preuve : Il suffit d'écrire les sommes partielles, de les écrire un peu différemment et de passer à la limite.

Proposition 1.2 La modification d'un nombre fini de termes ne change pas la nature d'une série, autrement dit si il existe N tel que $\forall n > N,\ u_n = v_n$, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.

Preuve : Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, pour $n > N$ on a $\mathcal{S}_n - S_n$ qui reste constant égale à $\sum_{k=0}^{N} v_k - u_k$, la suite $(\mathcal{S}_n)$ converge ssi la suite (S_n) converge.

Proposition 1.3 Si $\sum u_n$ est une série convergente alors la suite (u_n) tend vers 0.
Attention : la réciproque est fausse.

Exemple 1.2 La série $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ est divergente car $S_n = \sqrt{n+1}$ et pourtant son terme général tend vers 0, il suffit pour voir cela de multiplier par la quantité conjuguée.

Preuve : Soit S_n la nième somme partielle de la série $\sum u_k$. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $\lim S_n = l \in \mathbb{R}$, donc $\lim S_{n-1} = l$ or

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Donc en passant à la limite on obtient $\lim u_n = l - l = 0$.

Remarque 1.3 Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme S. La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, et la suite des restes $(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$. Si la suite des restes existe alors elle converge vers 0.

fin de la semaine 3

vidéo 4: Comparaison de

2 Séries à termes positifs STP

2.1 Comparaison

Les séries à termes positifs ont des propriétés bien particulières, lorsque l'on veut utiliser une de ces propriétés très pratiques, il est indispensable de bien vérifier que les termes de la série sont positifs.

Définition 2.1 Une série $\sum u_n$ est à termes positifs si $\forall n,\ u_n \geq 0$.

Proposition 2.1 Si $\sum u_k$ est une série à terme positif, la suite de ses sommes partielles (S_n) est une suite croissante. Si cette suite (S_n) est majorée alors elle est convergente, sinon elle tend vers $+\infty$.

Preuve : $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, la suite est bien croissante. Or un résultat de première année nous dit qu'une suite croissante majorée est convergente, et qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Remarque 2.1 Pour une série à terme positif (et uniquement pour une série à termes positifs)
- Soit la série diverge et alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$.
- Soit la série converge et on note $\sum u_k < +\infty$, pour indiquer que la série converge.

Théorème 2.1 *Si* $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_k \leq v_k$

1) Si $\sum v_k$ converge alors $\sum u_k$ converge.
2) Si $\sum u_k$ diverge alors $\sum v_k$ diverge.

Preuve : Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, $S_n \leq T_n$ or (T_n) est une suite croissante donc chaque terme de la suite est inférieur à la limite de la suite. $T_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$, donc $S_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ donc la suite (S_n) est majorée, d'après ce qui précède la série $\sum u_k$ est donc convergente.

Si $\sum u_k$ diverge alors la suite (T_n) diverge vers $+\infty$, donc la suite (S_n) aussi.

Proposition 2.2 Si $\forall k > 0,\ v_k \geq 0$ et $u_k \sim v_k$ alors $\sum u_k$ converge si et seulement si $\sum v_k$ converge.

Preuve : Pour k assez grand $\frac{1}{2}u_k \leq v_k \leq 2u_k$. On utilise alors le théorème 2.1.

2.2 Séries de Riemann

Théorème 2.2 *La série de Riemann* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Preuve : Si $\alpha \leq 0$ le terme général ne tend pas vers 0 et la série est divergente.
Si $\alpha > 0$. En utilisant une intégrale on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

En sommant k variant de 1 à N on obtient :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

D'ou

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

D'ou pour $\alpha \neq 1$

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

Si $\alpha > 1$ alors $\lim 1 + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ la somme des suites partielles (S_n) est majorée, or la série est à terme positif, elle est donc convergente. Si $\alpha < 1$ alors $\lim \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = +\infty$, la série est divergente.

Si $\alpha = 1$ alors

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$\lim \ln(n+1) = +\infty$, la série est divergente.

fin de la semaine 4

vidéo 5: Série

3 Comparaison à une série géométrique

Définition 3.1 On appelle série géométrique une série de la forme $\sum aq^n$, où $a, q \in \mathbb{R}$.

3.1 Critère de Cauchy

Proposition 3.1 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, tel que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ ait pour limite l.
- Si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $l = 1$ on ne peut pas conclure en ce qui concerne la convergence de la série $\sum u_n$.

Exemple 3.1 La série $\sum(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$ est convergente car en appliquant la proposition avec $u_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$ on a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ qui tend vers $\frac{1}{2}$ donc $l = \frac{1}{2}$, la série est convergente.

Preuve : Si $l > 1$, pour n assez grand (c'est à dire il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n supérieur à N) $\sqrt[n]{u_n} > 1$, on peut élever à la puissance n, on obtient $u_n > 1$, or la série $\sum 1$ diverge donc la série $\sum u_n$ diverge.
Si $l < 1$, on commence par remarquer que $l < \dfrac{1+l}{2} < 1$, pour n assez grand (c'est à dire il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n supérieur à N) on a $\sqrt[n]{u_n} < \dfrac{1+l}{2}$, d'ou en élevant à la puissance n. $u_n < \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^n$, comme $0 < \frac{1+l}{2} < 1$, la série $\sum \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$ est convergente, et donc la série $\sum u_n$ est convergente.

3.2 Critère de D'Alembert

Lemme 1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives, telles qu' à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$
(cad $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$)
Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Preuve : $\forall n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$, on en déduit facilement par récurrence que $\dfrac{u_N}{v_N} \geqslant \dfrac{u_{N+1}}{v_{N+1}} \geqslant \dfrac{u_{N+2}}{v_{N+2}} \geqslant \dfrac{u_{N+3}}{v_{N+3}} \ldots \geqslant \dfrac{u_{N+k}}{v_{N+k}}$.
On en déduit que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{u_N}{v_N}\right) v_n$$

$\frac{u_N}{v_N}$ est une constante et la série $\sum v_n$ converge donc la série $\sum u_n$ converge. (c'est le théorème de comparaison 2.1)

Proposition 3.2 Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, telle que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ a pour limite l.
- Si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $l = 1$ on ne peut pas conclure en ce qui concerne la convergence de la série $\sum u_n$.

Preuve : Si $l > 1$, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, donc $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite est croissante à partir d'un certain rang, elle ne converge pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge. Si $l < 1$, on a $l < \frac{1}{2}(l+1) < 1$, posons $t = \frac{1}{2}(l+1)$ donc à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant t$. Posons $v_n = t^n$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = t$, d'ou l'on déduit qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Le lemme 1 permet de conclure, la série $\sum v_n$ étant convergente, la série $\sum u_n$ l'est aussi..

fin de la semaine 5 

vidéo 6: Convergence ab

4 Convergence absolue

Théorème 4.1 *Soit (u_n) une suite de réels. Si la série de terme général $|u_n|$ est convergente alors la série de terme général u_n est convergente, de plus :*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$

Attention la réciproque est fausse

Preuve : On va séparer les termes positifs et les termes négatifs de la suite (u_n). Posons $u_k^+ = \max(u_k, 0)$ et $S_n^+ = \sum_{k=0}^{n} u_k^+$ de même posons $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ et $S_n^- = \sum_{k=0}^{n} u_k^-$, les suites (u_n) et (v_n) sont des suites à termes positifs. On remarque que $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$, et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, comme la série $\sum |u_n|$ converge les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^+$ sont convergentes d'après le théorème 2.1 de comparaison . Or $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = S_n^+ - S_n^-$, la suite (S_n) est donc convergente de limite $\sum_{k=0}^\infty u_k^+ - \sum_{k=0}^\infty u_k^-$ qui est bien inférieure en valeur absolue à $\sum_{k=0}^\infty u_k^+ + \sum_{k=0}^\infty u_k^-$.

Définition 4.1 Lorsque la série $\sum |u_n|$ converge, on dit que la série $\sum u_n$ converge absolument.

Proposition 4.1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels tq $u_n = \mathbf{O}(v_n)$ et si la série $\sum |v_n|$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Preuve : $u_n = \mathbf{O}(v_n)$, il existe donc une constante K tel qu'à partir d'un certain rang $|u_n| \leqslant K|v_n|$.
La série $\sum |v_n|$ converge, donc la série $\sum K|v_n|$ converge, donc la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge

4.1 Séries alternées

Proposition 4.2 Soit (u_n) une suite décroissante positive, qui tend vers 0. La série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.
De plus si on note S sa somme et $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ la somme partielle d'indice n, on a l'encadrement :

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}$$

Preuve : Montrons que la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante, la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante, $S_{2n} \geq S_{2n+1}$ et $\lim S_{2n+1} - S_{2n} = 0$.
* $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = -u_{2n+1} + u_{2n+2} \leq 0$
* $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$
* $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \leq 0$
* $\lim S_{2n+1} - S_{2n} = 0$

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \ldots \leqslant S_{2N+1} \leqslant S_{2N} \leqslant \ldots S_2 \leqslant S_0$$

Donc $(S_{2n})_n$ est croissante majorée donc convergente, de même $(S_{2n+1})_n$ est décroissante minorée elle est convergente or $\lim S_{2n+1} - S_{2n} = 0$ les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ ont même limite donc (S_n) est convergente, notons S sa limite. On a

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$$

D'ou $S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0$. D'ou $-u_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$.
De même $0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1}$. D'ou $0 \leq S - S_{2n+1} \leq u_{2n+2}$.

fin de la semaine 6

vidéo 7: Produit de Cauchy

4.2 Produit de Cauchy

Théorème 4.2 *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes, posons*

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q \left(= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

La série $\sum c_n$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^\infty c_k = \left(\sum_{k=0}^\infty a_k \right) \left(\sum_{k=0}^\infty b_k \right)$$

Preuve : Montrons d'abord que la série $\sum c_k$ est absolument convergente.
Posons $d_n = \sum_{p+q=n} |a_p b_q|$ $(= \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}|)$, remarquons d'abord que $0 \leq |c_n| \leq d_n$, ensuite que pour tout n

$$\sum_{k=0}^n d_k \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \sum_{k=0}^n |b_k| \leq \sum_{k=0}^\infty |a_k| \sum_{k=0}^\infty |b_k|$$

La série de terme général d_n est une série à terme positif dont la suite des sommes partielles est majorée, elle est donc convergente.
La série $\sum |c_n|$ est donc convergente.
Montrons maintenant l'égalité entre les trois sommes. Posons $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$, on a

$$|A_n B_n - C_n| = |\sum_{k=0}^n a_k \sum_{l=0}^n b_l - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n \\ k+l \leq n}} a_k b_l| = |\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n \\ k+l > n}} a_k b_l|$$

D'ou $|A_nB_n - C_n| \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n \\ k+l > n}} |a_kb_l| \leq \sum_{n \leq k \leq 2n} d_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} d_k$ or cette dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut quitte à prendre n grand, car la série $\sum d_k$ est convergente.

fin de la semaine 7 

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

1 Suites de fonctions

Définition 1.1 Une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge simplement vers une fonction f sur I si :

$$\forall x \in I, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Remarque 1.1 Pour tout n, f_n est une fonction définie sur I, pour tout $x \in I$, $(f_n(x))_n$ est une suite de réels.

Exemple 1.1 $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{nx+\pi}{n+1}\right)$.
Pour un x fixé quelconque on remarque que $\lim_n f_n(x) = \sin x$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction sinus.

Remarque 1.2 La CS ne conserve pas les propriétés locales des fonctions : continuité, dérivabilité, limite, etc... C'est à dire que si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction f, la fonction f peut très bien ne pas être continue. En revanche si les f_n sont des fonctions croissantes alors la limite simple des f_n si elle existe est croissante.

Exemple 1.2 $f_n(x) = \cos^{2n} x$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par
$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = k\pi \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 Séries de fonctions

2.1 Convergence simple et convergence normale

vidéo 8: Convergence simple de

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I si la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$, $\forall x \in I$, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = S(x)$. On note alors $\sum_{k=0}^{\infty} f_n$ cette fonction f.

Proposition 2.1 Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers 0.

Preuve : trivial

Définition 2.1 Soit (f_n) une suite de fonctions bornées définies sur un intervalle I, on dit que la série de fonctions $\sum f$ converge normalement sur I s'il existe une suite de réels (b_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I \; |f_n(x)| \leq b_n \quad \text{et} \quad \sum b_n \text{ converge}$$

Proposition 2.2 Soit (f_n) une suite de fonctions bornées définies sur I et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \sup\{|f_n(x)|, x \in I\}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum \alpha_n$ converge.

Preuve : Sens direct : On suppose que la série de fonctions converge normalement sur I, alors pour tout n, b_n est un majorant de la fonction f_n, donc α_n qui est le plus petit des majorants, est inférieur à b_n ($0 \leqslant \alpha_n \leqslant b_n$) or $\sum b_n$ converge donc $\sum \alpha_n$ converge aussi. Réciproquement si la série $\sum \alpha_n$ converge, il suffit de poser $b_n = \alpha_n$ et la définition de la convergence normale est vérifiée.

Proposition 2.3 Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I alors pour tout intervalle $J \subset I$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S sur J.

Proposition 2.4 Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I alors il existe une fonction S telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I.

Preuve : Pour tout x fixé de I, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ converge, donc la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.

2.2 Convergence normale et continuité de la somme.

Théorème 2.1 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge normalement sur I, telle que pour tout n la fonction f_n est continue alors, la somme $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est une fonction continue sur I.*

Preuve : On rappelle la définition de $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Soit $a \in I$, soit $\varepsilon > 0$, comme la série $\sum f_n$ converge normalement il existe (b_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I \; |f_n(x)| \leq b_n \quad \text{et} \quad \sum b_n \text{ converge}$$

On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que $\sum_{k=N+1}^{+\infty} b_k \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$. La fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g = \sum_{k=0}^{N} f_k$ est la somme de $N+1$ fonctions continues elle est donc continue, elle est donc continue en a, il existe donc $\eta > 0$ telle que $\forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. On a alors pour $x \in I$ tel que $|x-a| < \eta$:

$$\begin{aligned}
|S(x) - S(a)| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x)\right| && (3.1)\\
&= \left|\sum_{k=0}^{N} f_n(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{k=0}^{N} f_n(a) - \sum_{k=N+1}^{\infty} f_n(a)\right| && (3.2)\\
&= \left|\sum_{k=0}^{N} f_n(x) - \sum_{k=0}^{N} f_n(a) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{k=N+1}^{\infty} f_n(a)\right| && (3.3)\\
&= \left|g(x) - g(a) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{k=N+1}^{\infty} f_n(a)\right| && (3.4)\\
&\leqslant |g(x) - g(a)| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} f_n(a)\right| && (3.5)\\
&\leqslant |g(x) - g(a)| + \sum_{k=N+1}^{\infty} b_n + \sum_{k=N+1}^{\infty} b_n && (3.6)\\
&\leqslant \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon && (3.7)
\end{aligned}$$

vidéo 9: Étude d'une suite de fonctions

fin de la semaine 8

2.3 Convergence normale intégrale et dérivée de la somme.

Proposition 2.5 Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge normalement sur I, telle que pour tout n la fonction f_n est continue alors pour tout a et b dans I on a

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(t)\ \mathrm{d}t$$

Preuve : D'après le théorème 2.1, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, on peut l'intégrer sur ce segment, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, il existe α_k terme général d'une série convergente, tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$, $|f_k(x)| \leqslant \alpha_k$ on a alors d'après le théorème 4.1 pour $t \in [a,b]$ $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(t)\ \mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\ \mathrm{d}t\right| && (3.8)\\
&= \left|\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\ \mathrm{d}t\right| && (3.9)\\
&= \left|\int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)\ \mathrm{d}t\right| && (3.10)\\
&\leq \int_a^b \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)\right|\ \mathrm{d}t && (3.11)\\
&\leq \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(t)|\ \mathrm{d}t && (3.12)\\
&\leq \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k\ \mathrm{d}t && (3.13)\\
&\leq (b-a) \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k && (3.14)
\end{aligned}$$

3.8 et 3.9 : linéarité de l'intégrale
3.10 : définition de la somme d'une série.
3.11 : la valeur absolue d'une intégrale est inférieure à l'intégrale de la valeur absolue.(bornes de l'intégrale dans le bon sens)
3.13 : la valeur absolue du reste d'une série absolument convergente est inférieure au reste de la série des valeurs absolues (théoréme 4.1)

Or comme la série $\sum \alpha_k$ converge, on a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = 0$, finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\ \mathrm{d}t$.

Théorème 2.2 *Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$, si la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S sur I, que pour tout n la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que la série $\sum f'_n$ converge normalement sur I, alors la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$\forall x \in I,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$$

Preuve : Posons $\forall x \in I,\ g(x) = \int_a^x \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(t)\ \mathrm{d}t$, d'après la proposition précédente, on a $\forall x \in I,\ g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x f'_k(t)\ \mathrm{d}t\ \sum_{k=0}^{\infty} f$ $f_k(a) = S(x) - S(a)$. Si maintenant l'on dérive cette égalité on obtient $g'(x) = S'(x)$ or g n'est autre qu'une primitive de $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$. On a bien $S' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k$.

fin de la semaine 9

vidéo 10: Introduction aux série

3 Séries entières

3.1 Définitions

Définition 3.1 Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$, où (a_n) est une suite de réels (ou de complexes). Autrement dit son terme général est la fonction $x \mapsto a_n x^n$.

Proposition 3.1 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, on pose
- $R_1 = \sup\{|x| \in \mathbb{R}, (a_n x^n)_n \text{ est bornée}\}$;
- $R_2 = \sup\{|x| \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} a_n x^n = 0\}$;
- $R_3 = \sup\{|x| \in \mathbb{R}, \sum_n a_n x^n \text{ converge}\}$;
- $R_4 = \sup\{|x| \in \mathbb{R}, \sum_n |a_n x^n| \text{ converge}\}$;

Alors $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$

Définition 3.2 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, il existe un élément $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ appelé rayon de convergence de la série entière tel que :
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (-R < x < R) \Rightarrow \sum |a_n x^n|$ converge.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (x < -R \ \text{ ou } \ x > R) \Rightarrow \sum a_n x^n$ diverge.

Preuve : On va démontrer l'existence du rayon de convergence ainsi que la propriété.

Il faut comprendre ici le sup comme un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, lorsque une partie A de $\mathbb{R}$ est non vide majorée $\sup A$ et sa borne supérieure, lorsque une partie A de $\mathbb{R}$ est non vide non majorée $\sup A = +\infty$

Les ensembles $\{|x| \in \mathbb{R}, (a_n x^n)_n \text{ est bornée}\}$; $\sup\{|x| \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} a_n x^n = 0\}$; , $\sup\{|x| \in \mathbb{R}, \sum_n a_n x^n \text{ converge}\}$; $\sup\{|x| \in \mathbb{R}, \sum_n |a_n x^n| \text{ converge}\}$; sont non vides, car 0 leur appartient, on en déduit donc que R_1, R_2, R_3, et R_4 sont bien définies.

Remarquons d'abord que

$$\{|x| \in \mathbb{R}, \sum_n |a_n x^n| \text{ converge}\} \subset \{|x| \in \mathbb{R}, \sum_n a_n x^n \text{ converge}\} \subset \{|x| \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} a_n x^n = 0\}$$

$$\{|x| \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} a_n x^n = 0\} \subset \{|x| \in \mathbb{R}, (a_n x^n)_n \text{ est bornée}\}$$

On en déduit immédiatement que $R_1 \geq R_2 \geq R_3 \geq R_4$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| < R_1$ alors il existe x' tel que $|x| < |x'| < R_1$ et $(a_n {x'}^n)$ bornée. On a alors la majoration

$$|a_n x^n| \leq \left| a_n {x'}^n \left(\frac{x}{x'}\right)^n \right|$$

Or $(a_n {x'}^n)$ est bornée par un réel M et la série $\sum \left(\frac{x}{x'}\right)^n$ converge car $|x| < |x'|$. Donc $\sum |a_n x^n|$ converge.

Si $|x| > R_1$ alors la suite $(a_n x^n)$ est non bornée. Donc la série $\sum a_n x^n$ diverge.

Cela montrer que le rayon de convergence de la définition 3.2 existe bien et vaut R_1.

Montrons que $R_4 = R_1$, supposons que $R_4 > R_1$, soit alors $x \in]R_1; R_4[$. Comme $|x| > R_1$ d'après ce qui précède $\sum |a_n x^n|$ diverge. Par définition de R_4, il existe x' tel que $-x| < |x'| \leq R^4$ et $\sum |a_n {x'}^n|$ converge. Comme $|a_n x^n| \leq |a_n {x'}^n|$ la série $\sum |a_n x^n|$ converge : Absurde. Donc $R_4 = R_1$. Donc $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$.

fin de la semaine 10

vidéo 11: Rayon de convergence

3.2 Propriétés élémentaires

Proposition 3.2 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour tout réel a, b tel que $[a; b] \subset]-R; R[$, la série de fonction $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[a; b]$.

Preuve : Il existe un réel γ tel que $[a; b] \subset [-\gamma; \gamma] \subset] - R; R[$. On a alors

$$\sup_{x\in[a;b]} \{|a_n x^n|\} \leq |a_n \gamma^n|$$

Or $|\gamma| < R$ donc la série $\sum |a_n \gamma^n|$ converge.

Proposition 3.3 Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b et de somme S_a et S_b sur $]-R_a, R_a[$ et $]-R_b, R_b[$. On note $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$, R_{a+b} et R_{ab} les rayons de convergence des séries $\sum(a_n + b_n)x^n$ et $\sum c_n x^n$, enfin on note S_{a+b} et S_{ab} leur somme. On a alors :
1) $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$ et $R_{ab} \geqslant \min(R_a, R_b)$
2) Sur $]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)[$, $S_{a+b} = S_a + S_b$
3) Sur $]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)[$, $S_{ab} = S_a S_b$

Proposition 3.4 Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

Preuve : Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et R' celui de $\sum n a_n x^n$, comme $|n a_n x^n| \geq |a_n x^n|$ on a immédiatement que $R \geq R'$. Soit x tq $|x| < R$ alors il existe t tel que $|x| < t < R$, $|n a_n x^n| = |n a_n t^n \left(\frac{x}{t}\right)^n| = |a_n t^n n \left(\frac{x}{t}\right)^n|$, or $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x}{t}\right)^n = 0$, donc $|n a_n x^n| = \mathbf{o}(|a_n t^n|)$, or $\sum |a_n t^n|$ converge donc $\sum |n a_n x^n|$ converge.

3.3 Propriétés de la somme d'une série entière

Proposition 3.5 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on note S la somme de cette série entière $\forall x \in]-R; R[, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Sur l'intervalle ouvert $]-R; R[$, S est une fonction continue.

Preuve : Il suffit pour un x fixé de prendre un intervalle $[a; b]$ contenant strictement x et inclus dans $]-R; R[$. puis d'utiliser la convergence normale sur $[a; b]$. S est continue en tout x de $]-R; R[$.

Proposition 3.6 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on note S la somme de cette série entière $\forall x \in]-R; R[, S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$. Sur l'intervalle ouvert $]-R; R[$, S est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, de plus

$$\forall x \in]-R; R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\forall x \in]-R; R[,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

En particulier on a $S(0) = a_0;\ S'(0) = a_1;\ S''(0) = 2a_2;\ \ldots; S^{(k)}(0) = k! a_k;\ \ldots$.

Preuve : En utilisant la proposition 3.4 et la convergence normale sur tout intervalle $[a; b]$ inclus dans $]-R, R[$ des séries dérivées.

3.4 Fonction exponentielle

Vraisemblablement lorsque vous avez rencontré la fonction exponentielle pour la première fois, on vous a dit qu'il existait une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui vérifiait $f' = f$ et telle que $f(0) = 1$. Évidement l'existence d'une telle fonction n'a rien d'évident. A partir de la, on démontre assez facilement l'unicité d'une telle fonction, puis ses propriétés élémentaires $e^{a+b} = e^a e^b$, positivité, croissance. Les séries entières nous permettent de démontrer l'existence d'une telle fonction :

Proposition 3.7 La série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, sa somme notée exp vérifie $\exp' = \exp$.

Preuve : Pour $x \neq 0$ fixé, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge d'après le critère de D'Alembert. Le rayon de convergence est donc infini, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

fin de la semaine 11

vidéo 12: Formule de Taylor avec re

3.5 Développement d'une fonction en série entière

Définition 3.3 On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, est développable en série entière (DSE) e n 0 si il existe un intervalle non vide $]-r, r[\subset I$ et une suite de réels (a_n) tel que $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Proposition 3.8 Unicité du DSE.
Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence $R > 0$ et $R' > 0$ si il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Alors $R = R'$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

Preuve : Il suffit de remarquer que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, où $\forall x \in]-\alpha; \alpha[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Proposition 3.9 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, si f est développable en série entière en 0, alors il existe $r > 0$ tel que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Remarque 3.1 Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne sont pas forcément développable en série entière. Exemple avec $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Proposition 3.10 Soit $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, on a la formule de Taylor avec reste intégral

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Preuve : Intégration par parties successives.

Proposition 3.11 Soit f et g deux fonctions développable en série entière en 0, alors les fonctions $f + g$, fg, f' ainsi que les primitives de f sont développables en série entière en 0.

Preuve : Pour $|x| < \min(R_f, R_g)$ on a par produit de Cauchy

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i+j=n} a_i b_j) x^n$$

dond fg est bien DSE.

Proposition 3.12 On a les développements en série entière suivants :

1) $\forall x \in]-1; 1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$
2) $\forall x \in]-1; 1[,\ \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{-1}{n} x^n.$
3) $\forall x \in]-1; 1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$
4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$
5) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$

Preuve :
1) Série géométrique.
2) En intégrant la série géométrique.
3) En utilisant Taylor reste intégrale (un peu compliqué, voir ci dessous)
4) En utilisant Taylor reste intégrale (simple).

5) En utilisant Taylor reste intégrale (simple).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; posons $f(x) = (1+x)^\alpha$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$.
Soit $x \in]-1;1[$;

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or en posant pour t entre 0 et x, $h(t) = \frac{x-t}{1+t}$, on obtient $h'(t) = \frac{-1-x}{(1+t)^2}$, donc h est décroissante,
- Si $x < 0$ alors $h \leqslant 0$ et $|h| \leqslant |h(0)| = |x|$
- Si $x > 0$, alors $h \geqslant 0$ et $|h| \leqslant |h(0)| = |x|$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|(1+x)^\alpha - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k\right| &\leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)|}{n!} \left|\int_0^x |x|^n (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)||x|^n}{n!} \frac{|(1+x)^\alpha - 1|}{\alpha}
\end{aligned}$$

En notant a_n ce dernier terme on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{|(\alpha-(n+1))||x|}{n+1} \to |x| < 1$ La série de terme général a_n converge et donc son terme général a_n tend vers 0, on a bien montré que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|(1+x)^\alpha - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k\right| = 0$$

fin de la semaine 12 

4 Compléments sur les séries

4.1 Séries commutativement convergentes

4.2 Somme d'équivalent reste et sommes partielles

4.3 Série complexe, série entière complexe

Index